# PARAGRAAF 5.1 : MACHTEN EN WORTELS

## LES 1 : MACHTSREGELS

| MACHTSREGELS | VOORBEELD |
|---|---|
| **(1)** $a^p \times a^q = a^{p+q}$ | $a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$ |
| **(2)** $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ | $\frac{a^{10}}{a^2} = a^{10-2} = a^8$ |
| **(3)** $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ | $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$ |
| **(4)** $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ | $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$ |
| **(5)** $a^0 = 1$ | $7^0 = 1$ |
| **(6)** $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ | $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ |
| **(7)** $(a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ | $(a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ |
| **(8)** $(a)^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$ | $(a)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$ |

Er zijn ook twee speciale gevallen die vaak voorkomen

| | |
|---|---|
| **(9)** $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$ | $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$ |
| **(10)** $(a)^{1/2} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ | $(6)^{1/2} = \sqrt[2]{6} = \sqrt{6}$ |

## VOORBEELD 1

Schrijf als macht van x

**a.** $x^3\sqrt{x}$

**b.** $\frac{\sqrt{x}}{x}$

**c.** $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x^2}$

Schrijf zonder gebroken en negatieven machten

**d.** $x^{-\frac{3}{4}}$

**e.** $x^{-2\frac{1}{2}}$

## OPLOSSING 1

**a.** $x^3\sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

**b.** $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^1} = x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$

**c.** $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x^2} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-2} = x^{-1\frac{2}{3}}$

**d.** $x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

**e.** $x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

## VOORBEELD 2

Schrijf de volgende formules om in de vorm $y = ax^n$ of $y = bg^x$

**a.** $y = \frac{1}{4}(2x^{-2})^3\frac{2}{x^4}$

**b.** $y = 10 \cdot 2^{3x+2}$

## OPLOSSING 2

**a.** $y = \frac{1}{4}(2x^{-2})^3\frac{2}{x^4} = \frac{1}{4} \cdot 2^3 \cdot x^{-6} \cdot 2 \cdot x^{-4}$

$y = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 2 \cdot x^{-6} \cdot x^{-4} = 4x^{-10}$

**b.** $y = 10 \cdot 2^{3x+2} = 10 \cdot 2^{3x} \cdot 2^2$

$y = 10 \cdot 2^2 \cdot (2^3)^x = 40 \cdot 8^x$

## LES 2 FORMULES MET HOGEREMACHTSWORTELS

### VOORBEELD 1

Bereken (zonder rekenmachine)

**a.** $3 \cdot \sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{125}$

**b.** $10 \cdot \sqrt[4]{9^2} + 3 \cdot \sqrt{3^4} + \sqrt[4]{16}$

### OPLOSSING 1

**a.** $3 \cdot \sqrt[5]{2^5} - \sqrt[3]{5^3} = 3 \cdot 2 - 5 = 1$

**b.** $10 \cdot \sqrt[4]{81} + 3 \cdot \sqrt{81} + \sqrt[4]{2^4} = 10 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 2 = 59$

### VOORBEELD 2

Herleid de volgende formule tot de vorm $y = c \cdot \sqrt[4]{xy}$.

$y = 2 \cdot \sqrt[4]{625y} \cdot \sqrt[4]{16x} + \sqrt[4]{81xy}$

### OPLOSSING 2

$y = 2 \cdot \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{y} \cdot \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{xy}$

$y = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{xy} + 3 \cdot \sqrt[4]{xy} = 23 \cdot \sqrt[4]{xy}$

## PARAGRAAF 5.2 : WORTELFORMULES

### LES 1 : WORTELFORMULES, DOMEIN EN BEREIK

#### DEFINITIES

- Domein = { alle x-en die je mag invullen in de formule }
- Bereik = { alle y-waarden die als uitkomst uit de formule kunnen komen }

**STAPPENPLAN DOMEIN EN BEREIK BEPALEN:**

**(1)** Bereken de coördinaten van het beginpunt (wortel = 0)
**(2)** Bereken met GR een aantal punten een schets de grafiek.
**(3)** Lees uit de grafiek het domein en bereik af.

#### VOORBEELD 1

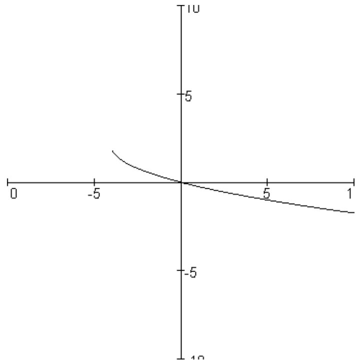
**a.** Bepaal het domein en bereik van $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$
**b.** Los algebraïsch op : $f(x) > -1$

## OPLOSSING 1

**a.** **(1)** $x + 4 = 0$

$x = -4 \qquad \rightarrow y = 2$

Beginpunt = $(-4{,}2)$



**(2)** $Y1 = 2 - \sqrt{x+4}$ geeft de volgende schets :

**(3)** $D_f = [-4, \rightarrow>$ en $B_f = <\leftarrow, 2]$

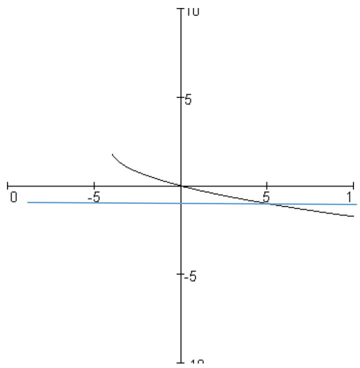
of

$x \geq -4$ en $y \leq 2$

**b.** Een ongelijkheid bestaat altijd uit drie stappen

**(1)** Los de gelijkheid op

$$2 - \sqrt{x+4} = -1$$
$$\sqrt{x+4} = 3$$
$$x + 4 = 9$$
$$x = 5$$



**(2)** Maak een schets :

**(3)** Lees de oplossing af en let op het randpunt !!!

$-4 \leq x \leq 5$

## LES 2 : WORTELVERGELIJKINGEN OPLOSSEN

### STAPPENPLAN WORTELVERGELIJKING

Een wortelvergelijking los je op door :

**(1)** De wortel apart zetten (isoleren)
**(2)** Kwadrateren
**(3)** Oplossen en controleren of de oplossing klopt in de oorspronkelijke vergelijking.

### VOORBEELD 1

Los exact op

**a.** $2x + 1 = \sqrt{x+1}$
**b.** $3x - 2\sqrt{x} = 1$

### OPLOSSING 1

**a.** $(2x+1)^2 = x + 1$ $\{ A^2 = B^2 \rightarrow A = B \ \ v \ \ A = -B \}$
$4x^2 + 4x + 1 = x + 1$
$4x^2 + 4x = 0$
$4x(x+1) = 0$
$4x = 0 \quad v \quad x + 1 = 0$
$x = 0 \quad v \quad x = -1$

**b.** $3x - 2\sqrt{x} = 1$ { Wortel apart en dan kwadrateren }
$2\sqrt{x} = 3x - 1$ { Kwadrateren }
$4x = (3x-1)^2$
$4x = 9x^2 - 6x + 1$
$9x^2 - 10x + 1 = 0$
$x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0$
$(x-1)(x - \frac{1}{9}) = 0$ { of abc-formule }
$x = 1 \ \ v \ \ x = \frac{1}{9}$ { bij kwadrateren altijd oplossingen controleren }
*(VN)* { want $2\sqrt{\frac{1}{9}} \neq 3 \cdot \frac{1}{3} - 1$ }

Dus de enige oplossing is $x = 1$

## LES 3 : VARIABELE VRIJMAKEN

### VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $A = 6 - 2\sqrt{p-5}$ .

Schrijf p als functie van A.

### OPLOSSING 1

$A = 6 - 2\sqrt{p-5}$

$A - 6 = -2\sqrt{p-5}$

$-\frac{1}{2}A + 3 = \sqrt{p-5}$

Kwadrateren geeft

$(-\frac{1}{2}A + 3)^2 = p - 5$

$\frac{1}{4}A^2 - 3A + 9 = p - 5$

$\frac{1}{4}A^2 - 3A + 14 = p$

Dus $p = \frac{1}{4}A^2 - 3A + 14$

## PARAGRAAF 5.3 : EXPONENTIËLE FUNCTIES

### LES 1 : TRANSFORMATIES

#### DEFINITIES

- T(p,q) = { Translatie / verschuiving van de grafiek p naar rechts en q omhoog }
- $V_{x\text{-as},\,c}$ = { Vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met factor c }
- Een exponentiele functie heeft alleen Horizontale Asymptoten. Je berekent die door de limiet naar $-\infty$ $(-100000)$ te nemen.

#### REGELS BIJ TRANSFORMEREN

**(1)** $f(x) \xrightarrow{T(a,b)} f(x-a)+b$

**(2)** $f(x) \xrightarrow{V_{x-as,c}} c \cdot f(x)$

#### VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4^x$. Bepaal de formule die ontstaat als :

**a.** $f$ eerst 5 naar rechts / 2 omlaag en vervolgens vermenigvuldigd wordt met 3. Noem deze formule g(x).

**b.** $f$ eerst vermenigvuldigd wordt met -2 en dan 3 naar links verschoven wordt.

**c.** Bepaal de asymptoten van g(x)

**d.** Los op g(x) > 12

#### *Oplossing 1*

**a.** $4^x \xrightarrow{T(5,2)} 4^{x-5}+2 \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3\cdot(4^{x-5}+2) = 3\cdot 4^{x-5}+6 = g(x)$

**b.** $4^x \xrightarrow{V_{x-as,-2}} -2\cdot 4^x \xrightarrow{T(-3,0)} -2\cdot 4^{x--3} = -2\cdot 4^{x+3}$

**c.** Horizontale Asymptoot (HA)

$$\lim_{x\to-\infty} 3\cdot 4^{x-5}+6 = 3\cdot 4^{-\infty}+6 = \frac{3}{4^{\infty}}+6 = 0+6 = 6$$

Dus $HA:\ y = 6$

**d.** Een ongelijkheid bestaat altijd uit drie stappen

**(1)** Los de gelijkheid op $3 \cdot 4^{x-5} + 6 = 12$

$$3 \cdot 4^{x-5} = 6$$

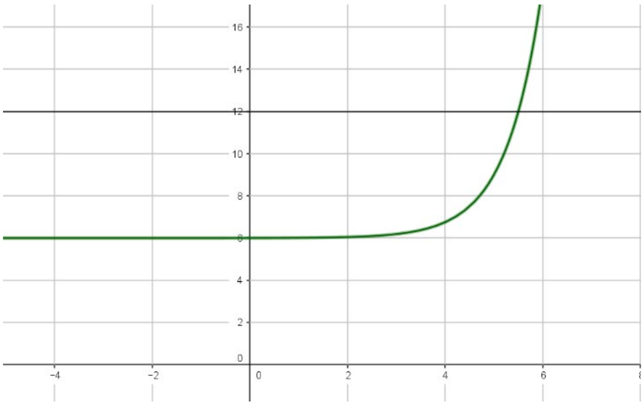
$$4^{x-5} = 2$$

$$4^{x-5} = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$x - 5 = \frac{1}{2}$$

$$x = 5\frac{1}{2}$$

**(2)** Maak een schets :




**(3)** Lees de oplossing af uit de schets

$x > 5\frac{1}{2}$

## LES 2 : EXPONENTIËLE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

### VOORBEELD 1

Los algebraïsch op

**a.** $3^{5-x} = \frac{1}{27}$

**b.** $3 \cdot 2^{x-2} = 48$

**c.** $2^{x-2} = 4^{x+1}$

### OPLOSSING 1

**a.** $3^{5-x} = \frac{1}{27}$

$3^{5-x} = 3^{-3}$

$5 - x = -3$

$x = 8$

**b.** $3 \cdot 2^{x-2} = 48$

$2^{x-2} = 16$

$2^{x-2} = 2^4$

$x - 2 = 4$

$x = 6$

**c.** $2^{x-2} = 4^{x+1}$

$2^{x-2} = (2^2)^{x+1}$

$2^{x-2} = 2^{2x+2}$

$x - 2 = 2x + 2$

$-x = 4$

$x = -4$

## PARAGRAAF 5.4 : LOGARITMEN

## LES 1 LOGARITMEN

### DEFINITIE LOGARITMEN

- Hoofdregel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^{g}\log(b)$ met domein b>0
- Hulpregel : ${}^{g}\log(g^t) = t$

### VOORBEELD 1

Bereken uit je hoofd

**a.** ${}^{3}\log(9) =$

**b.** ${}^{3}\log(\sqrt{27}) =$ =

**c.** ${}^{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) =$ =

### OPLOSSING 1

**a.** ${}^{3}\log(9) = {}^{3}\log(3^2) = 2$

**b.** ${}^{3}\log(\sqrt{27}) = {}^{3}\log(\sqrt{3^3}) = {}^{3}\log\left((3^3)^{\frac{1}{2}}\right) = {}^{3}\log\left(3^{1\frac{1}{2}}\right) = 1\frac{1}{2}$

**c.** ${}^{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^{2}\log(2^{-1}) = -1$

### VOORBEELD 2

Bereken exact

**a.** ${}^{2}\log(x) = 4$

**b.** ${}^{5}\log(2x - 1) = 3$

**c.** $4 \cdot {}^{2}\log(2x) + 1 = 13$

### OPLOSSING 2

Je kunt dit op twee manieren oplossen :

- Met de hoofdregel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^{g}\log(b)$
- Met de hulpregel : ${}^{g}\log(g^t) = t$

**a.** ${}^{2}\log(x) = 4$ Of ${}^{2}\log(x) = 4$

$x = 2^4 = 16$ Of ${}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(2^4)$

$x = 2^4$

**b.** ${}^{5}\log(2x - 1) = 3$ Of ${}^{5}\log(2x - 1) = 3$

$2x - 1 = 5^3$ Of ${}^{5}\log(2x - 1) = 3$

$2x - 1 = 125$ Of ${}^{5}\log(2x - 1) = {}^{5}\log(5^3)$

$2x = 126$ Of $2x - 1 = 125$

$x = 63$ Of $2x = 126$

$x = 63$

**c.** Deze doen we alleen met de hoofdregel

$4 \cdot {}^{2}\log(2x) + 1 = 13$

$4 \cdot {}^{2}\log(2x) = 12$

${}^{2}\log(2x) = 3$

$2x = 2^3$

$2x = 8$

$x = 4$

## LES 2 : LOG-VERGELIJKINGEN EN GRAFIEKEN

### DEFINITIE

- Als $y = {}^{g}\log{(ax + b)}$ dan is er een Verticale Asymptoot(VA) als $ax + b = 0$.
- Deze moet je uitrekenen voordat je een grafiek tekent !!!

### VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = {}^{2}\log(x - 5) + 1$.

**a.** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek
**b.** Teken de grafiek en bepaal het domein.

### OPLOSSING 1

**a.** ${}^{2}\log(x) \xrightarrow{T(5,1)} {}^{2}\log(x - 5) + 1$

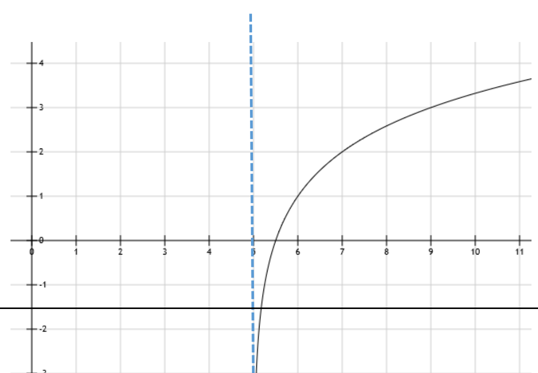
**b.** **(1)** VA als $x - 5 = 0$
$x = 5$ dus $VA : x = 5$

**(2)** Maak een tabel met $y = {}^{2}\log(x - 5) + 1$ (met logbase-knop)

| $x$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = {}^{2}\log(x - 5) + 1$ | 1 | 2 | 2,6 | 3 | 3,3 | 3,6 |

**(3)** Teken VA bij $x = 5$

$x = 5$



## LES 3 : EXPONENTIËLE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN EN OMSCHRIJVEN

### VOORBEELD 1

Los exact op

**a.** $3^{x+4} = 20$

**b.** $5 \cdot 2^{3x-1} = 100$

### OPLOSSING 1

**a.** $3^{x+4} = 20$ ( Gebruik nu de hoofdregel $\boldsymbol{g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g\log(b)}$ )

$x + 4 = {}^3\log(20)$

$x = {}^3\log(20) - 4$

**b.** $5 \cdot 2^{3x-1} = 100$

$2^{3x-1} = 20$

$3x - 1 = {}^2\log(20)$

$3x = {}^2\log(20) + 1$

$x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(20) + \frac{1}{3}$

### VOORBEELD 2

Maak x vrij bij de formule $y = 3^{x+4} - 20$ { Schrijf als x = … }

### OPLOSSING 2

$y = 3^{x+4} - 20$

$y + 20 = 3^{x+4}$

$x + 4 = {}^3\log(y + 20)$

$x = {}^3\log(y + 20) - 4$